9.3. Внутри большой теплоизолированной емкости с водой при температуре T_0 = 0 °С находится маленькая тонкостенная ёмкость с водой и кусочками льда массой m_0 = 100 г при той же температуре. Воду в большой ёмкости начинают нагревать так, что её температура увеличивается с постоянной скоростью. Часть тепла в результате теплообмена попадает внутрь маленькой ёмкости, и идет на плавление льда. Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур в большой и маленькой ёмкостях (закон Фурье). Известно, что когда температура в большой ёмкости достигла T_1 = 50 °С, внутри маленькой ёмкости расплавилось m_1 = 10 г льда. Оцените, какая масса льда m расплавится от начала нагрева до того момента, когда температура воды в большой ёмкости достигнет T_2 = 100 °С? Внутри каждой емкости содержимое активно перемешивается, так что температура во всех точках каждой емкости одинаковая.

Решение.

Предположим, что за всё время нагрева лёд в маленькой емкости весь не растает. Тогда температура маленькой емкости в течение всего процесса будет T_0 = 0 °С, а все получаемое тепло пойдет на плавление льда.

Поскольку мощность теплопередачи пропорциональна разности температур в большой и маленькой ёмкостях ($P = \alpha(T - T_0)$), а температура T растет линейно, то для первой части нагрева до T_1 = 50 °С это эквивалентно, как если бы температура равнялась среднему значению

$$T_{ср1} = \frac{T_0 + T_1}{2}. \qquad (1)$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\lambda m_1 = P_{ср1}\tau = \alpha\left(\frac{T_0 + T_1}{2} - T_0\right)\tau = \alpha\tau\frac{T_1 - T_0}{2}, \qquad (2)$$

где τ – время нагрева воды в большой емкости от T_0 до T_1.

Заметим, что

$$T_2 - T_1 = T_1 - T_0, \qquad (3)$$

и, следовательно, время нагрева от T_1 до T_2 также будет равно τ.

Тогда для второго участка нагрева:

$$T_{ср2} = \frac{T_1 + T_2}{2}. \qquad (4)$$

$$\lambda m_2 = P_{ср2}\tau = \alpha\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0\right)\tau, \qquad (5)$$

где m_2 – масса льда, растаявшего на втором участке нагрева.

Разделим уравнение (5) на уравнение (2):

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0};$$

$$m_2 = m_1\frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0}; \qquad (6)$$

Полная масса растаявшего льда:

$$m = m_1 + m_2 = m_1 + m_1\frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0} = m_1\frac{2T_1 + T_2 - 3T_0}{T_1 - T_0}. \qquad (7)$$

Подставляя числовые значения, получим m = 40 г, что меньше m_0 = 100 г.

Примечание. Школьник может, пользуясь равномерностью нагрева и $T_1 = \dfrac{T_0 + T_2}{2}$, рассматривать сразу нагрев от T_0 до T_2. В этом случае

$$T_{ср2} = \frac{T_0 + T_2}{2}. \qquad (4)$$

$$\lambda m = P_{ср2}\tau = \alpha\left(\frac{T_0 + T_2}{2} - T_0\right)\cdot 2\tau = \alpha\frac{T_2 - T_0}{2}\cdot 2\tau \qquad (5)$$

$$m = m_1\frac{2T_2 - 2T_0}{T_1 - T_0} = 40\text{ г}. \qquad (7)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что температура маленькой емкости в течение всего процесса будет T_0 = 0 °С.	1
2	Указано, что вследствие линейности нарастания температуры на первом участке ее можно заменить средним значением в виде уравнения (1) (или выполнено графическое интегрирование).	2
3	Записано уравнение теплового баланса (2) для процесса нагрева от T_0 до T_1.	1
4	Указано, что времена нагрева воды в большой емкости от T_0 до T_1 и от T_1 до T_2 одинаковы.	1
5	Указано, что вследствие линейности нарастания температуры на втором участке (или для всего процесса) ее можно заменить средним значением в виде уравнения (4) (или выполнено графическое интегрирование).	2
6	Записано уравнение теплового баланса (5) для процесса нагрева от T_1 до T_2 (или для всего процесса нагрева от T_0 до T_2).	1
7	Получено выражение (7) для массы растаявшего льда (подстановка $T_1 = \dfrac{T_0 + T_2}{2}$ не является ошибкой).	1
8	Получено числовое значение m = 40 г.	1
	Итого	**10**